$C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \; : \; f \text{ je spoj.} \}$

$d_\infty(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| \; : \; x \in [0,1] \}$

$= \max\{ \quad \dots \quad \}$.

Tvrdím, že MP $(C([0,1]), d_\infty)$ je separabilní. (Tj. ex. spočetná hustá část)

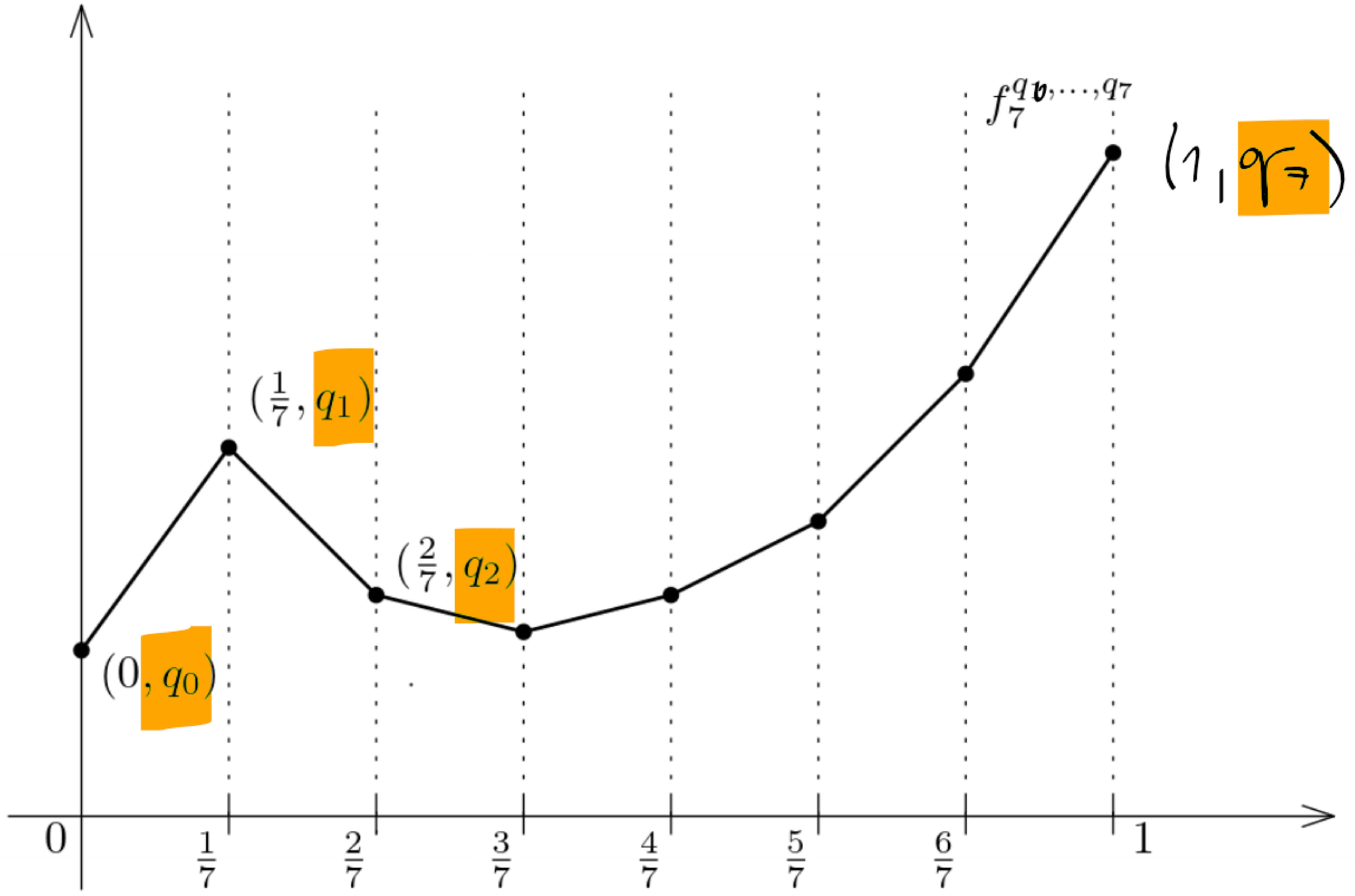
<u>Důkaz:</u> Pro $n \in \mathbb{N}$ a $q_0, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ definujme funkci $f_n^{q_0,\dots,q_n}$ tak, aby splňovala:

(a) $f_n^{q_0,\dots,q_n}\left(\frac{j}{n}\right) = q_j$, $j = 0,1,2,\dots,n$.

(b) je lineární na $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, $j = 0,1,2,\dots,n-1$.

Položme $D = \{ f_n^{q_0,\dots,q_n} \; : \; n \in \mathbb{N}, \; q_0,\dots,q_n \in \mathbb{Q} \}$

Tvrdím, že D je spočetná:



<u>Platí:</u> $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, kde

$D_n = \{ f_n^{q_0,\dots,q_n} \; : \; q_0,\dots,q_n \in \mathbb{Q} \}$

<u>Stačí:</u> $\forall n \in \mathbb{N}: D_n$ je spoč.

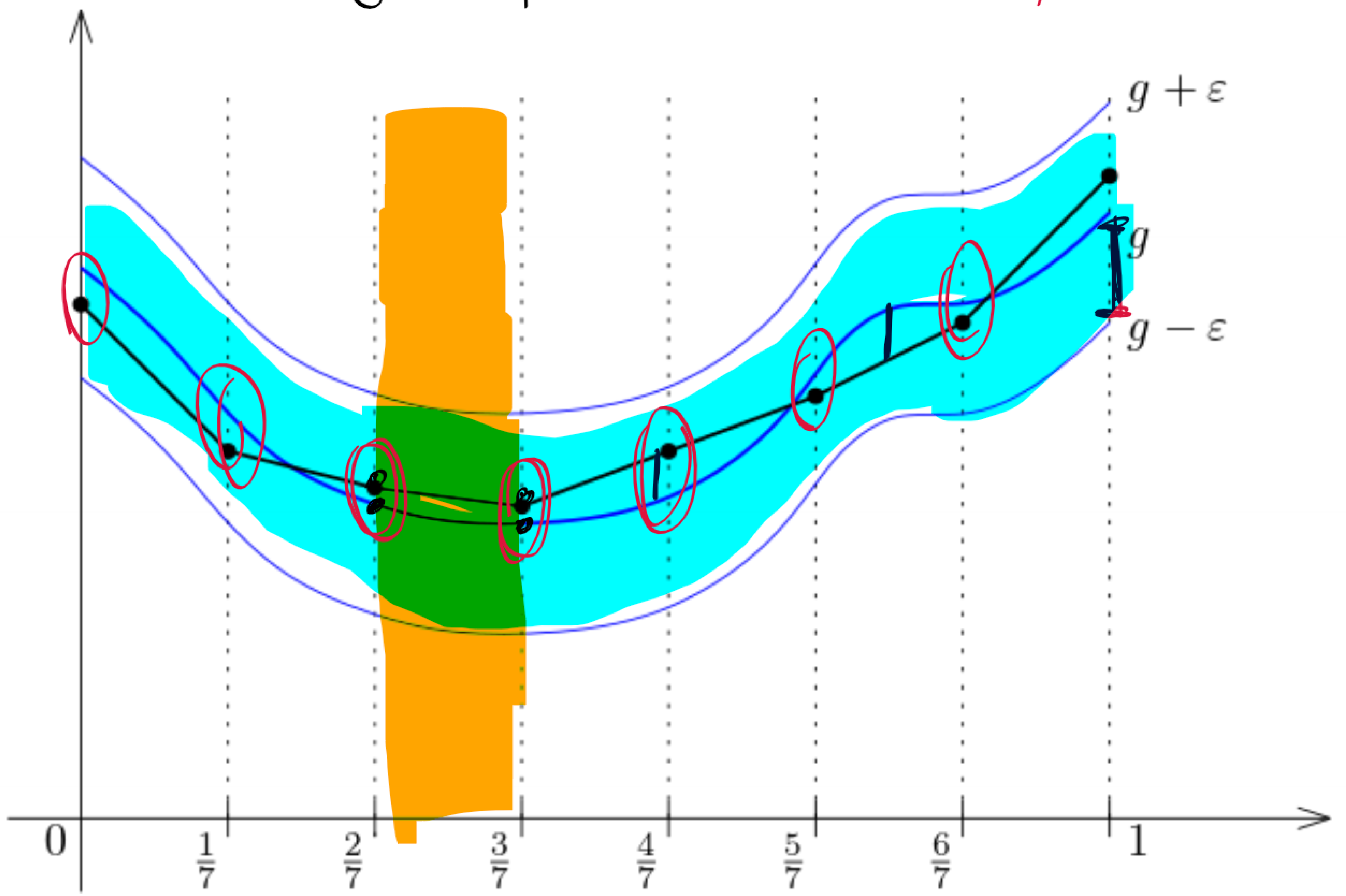
Existuje bijekce D_n na $\mathbb{Q}^{n+1}$ (<u>Zdův.:</u> je-li dána fce $f \in D_n$, najdu $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ a naopak)

Tedy D_n je spočetná, neboť $\mathbb{Q}$ (a tedy i $\mathbb{Q}^{n+1}$ je spočetná). Celkem: D je spoč.

D je hustá v $C([0,1])$:

Buď dána $g \in C([0,1])$ a $\varepsilon > 0$ lib.

Chceme najít prvek $D \cap B(g,\varepsilon)$.



Víme: Spojitá funkce na $[a,b]$ je stejnoměrně spojitá. Tedy g je S.S. na $[0,1]$, tj. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ $\forall x,y \in [0,1]$:

$$|x-y|<\delta \Longrightarrow |g(x)-g(y)| < \varepsilon/5.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{n} < \delta$. Najdeme $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, že

$$\left| g\left(\tfrac{j}{n}\right) - q_j \right| < \varepsilon/5, \quad j=0,\dots,n.$$

Položme $f := f_n^{q_0,\dots,q_n} \in D$. Pak pro libovolné $x \in [0,1]$ (a příslušné j, že $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$) platí:

$|g(x) - f(x)| \leq$

$$\leq |g(x) - g(\tfrac{j}{n})| + |g(\tfrac{j}{n}) - f(\tfrac{j}{n})| + |f(\tfrac{j}{n}) - f(x)|$$

$|x - \frac{j}{n}| \leq \frac{1}{n} < \delta$ $\qquad$ f je $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ lineární

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + |f(\tfrac{j}{n}) - f(\tfrac{j+1}{n})|$$

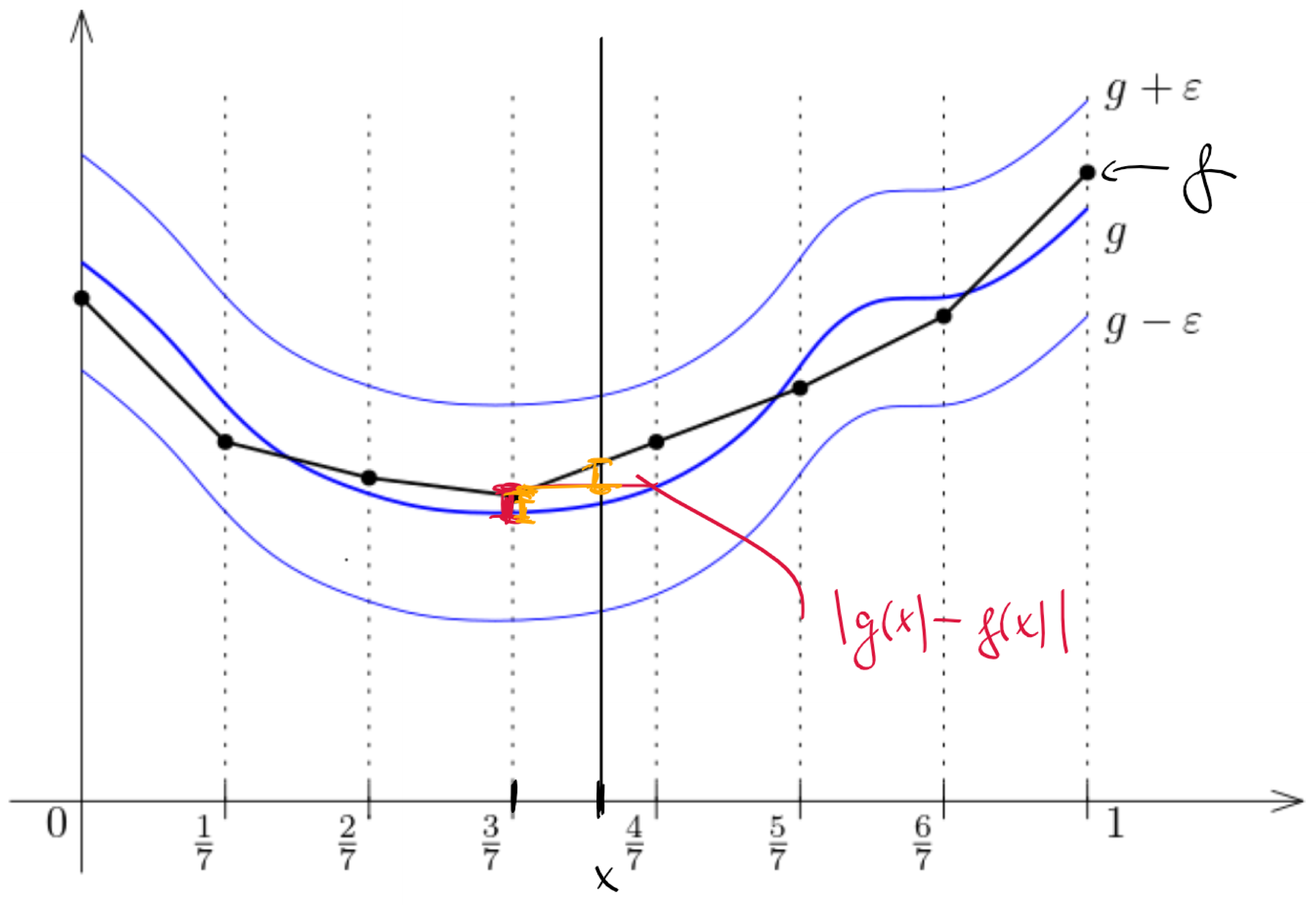
$$\leq 2\frac{\varepsilon}{5} + |f(\tfrac{j}{n}) - g(\tfrac{j}{n})| + |g(\tfrac{j}{n}) - g(\tfrac{j+1}{n})| + |g(\tfrac{j+1}{n}) - f(\tfrac{j+1}{n})| <$$

$$< 2\frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = 5\frac{\varepsilon}{5} \quad (\forall x \in [0,1])$$

Tedy $d_\infty(f,g) \leq 5\frac{\varepsilon}{5}$. Pochopitelně to stačí.

Platí: $f_0 \equiv 0 \in C([0,1])$,

$B(f_0, 2)$ je omezená, není TO.



$n = 7$, $j = 3$

$B(f_0, 2)$ je omezená: jasné.

(„omezenost = vejde se do nějaké koule")

$B(f_0,2)$ není TO. Obsahuje totiž funkce f_n, $n\in\mathbb{N}$, že

$$d_\infty(f_n, f_m) = 1, \quad n,m \in \mathbb{N},\ n\neq m.$$

Tj. $B(f_0,2)$ obsahuje nekonečnou 1-sep. množinu. Ale podle V18 TO omezené mají všechny ε-sep. podmn. konečné.

Pro $n\in\mathbb{N}$ ($n>1$) definujeme funkci $f_n\in C([0,1])$:

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1, \quad f_n\left(\tfrac{1}{n+1}\right) = f_n\left(\tfrac{1}{n-1}\right) = f(0) = f(1) = 0$$

f_n je lineární na $\left[0,\frac{1}{n+1}\right]$, $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]$, $\left[\frac{1}{n-1},1\right]$.

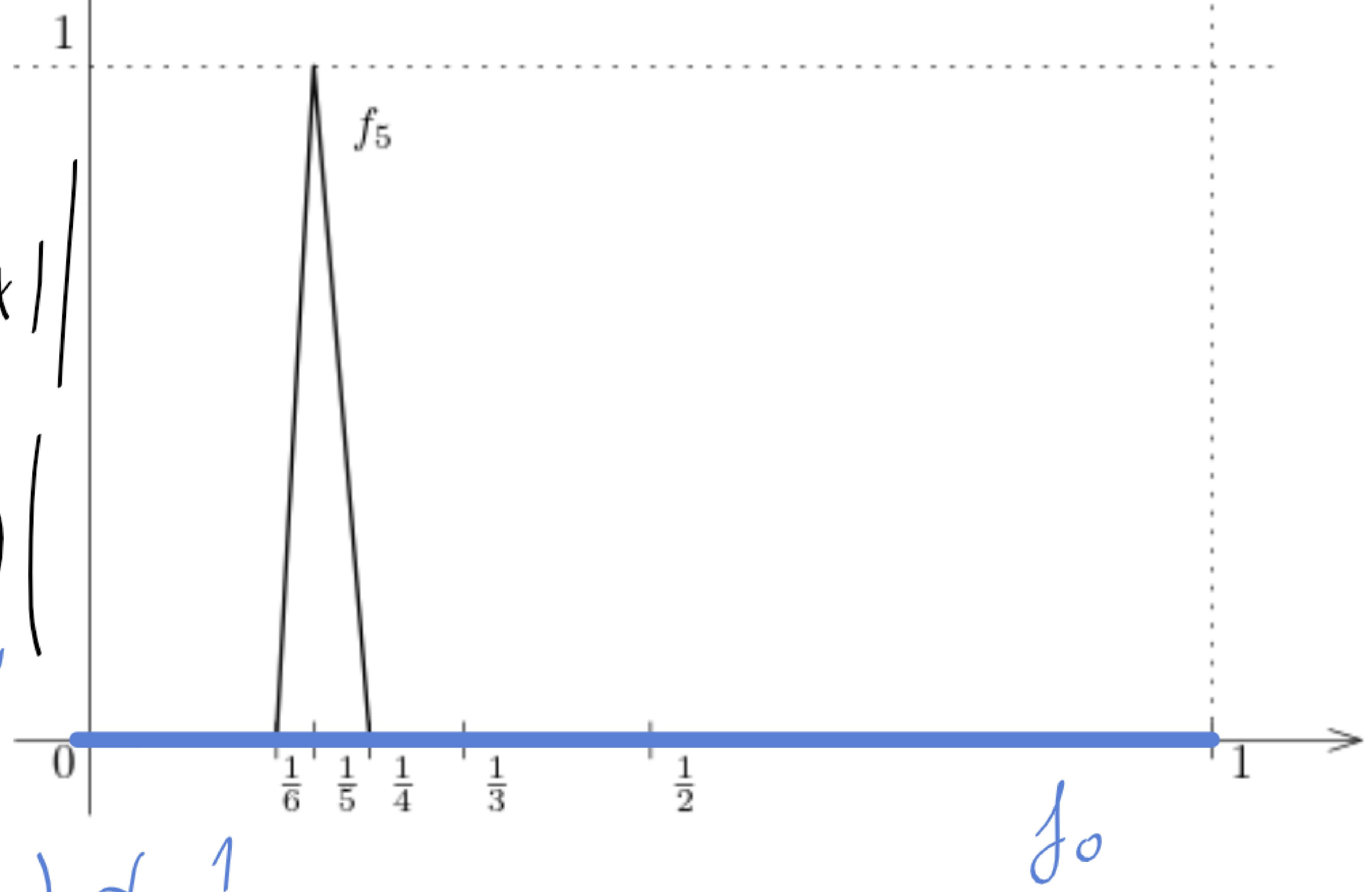
Pro $n\neq m$, $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

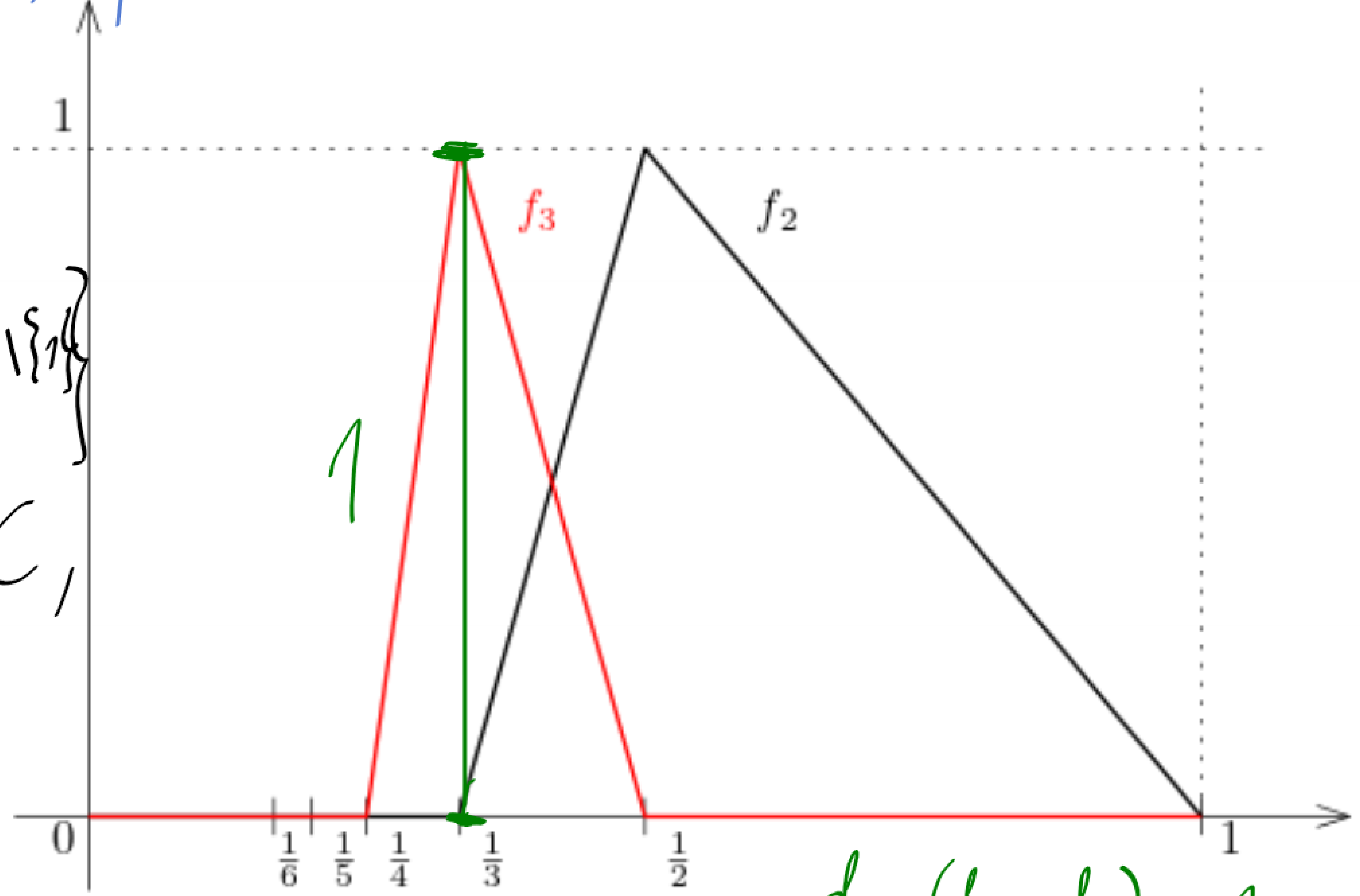
$$d_\infty(f_n,f_m) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f_m(x)| \geq \Big|\underbrace{f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{=1} - \underbrace{f_m\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{0}\Big|$$

$f_m\neq 0$ na $\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m-1}\right)\not\ni\frac{1}{n}$.

$= 1$.

Tedy $\{f_n : n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\}$ je 1-separovaná, nekonečná podmnožina $B(f_0,2)$.





$d_\infty(f_n,f_0)=1$

Platí $\forall x\in[0,1]$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

ÚPLNÉ PROSTORY

Definice 25: Buď (M, ρ) MP, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků M. Řekneme, že $\{x_n\}$ je *cauchyovská*, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Řekneme, že prostor (M, ρ) je *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posl. konverguje (tj. $\exists x \in M : \lim_{n \to \infty} x_n = x$).

Příklad 26:
- $(\mathbb{R}, \rho_e)$ (stand. metrika) je úplný (důkaz: analýza 1. sem.)
- $(\mathbb{Q}, \rho_e)$ není úplný.
- $[0,1)$ není úplný; $[a,b]$ je úplný.
- $[1, \infty)$ je úplný.

Příklad 27: $C([0,1])$ je *úplný*.

Dk: Budiž dána lib. cauchyovská posl. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C([0,1])$. *Chceme* najít její limitu

1. KROK Bodová konvergence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tj. $\forall x \in [0,1] : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje:

[Stačí si uvědomit, že pro lib. daní $x \in [0,1]$ je $\{f_n(x)\}$ $(\subseteq \mathbb{R})$ cauchyovská (tj. splňuje (BC)).

Víme: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n\geq n_0:\ \max_{x\in[0,1]} |f_m(x)-f_n(x)| < \varepsilon$

$$\rotatebox{90}{$\leq$}$$

Chceme: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n\geq n_0:\ |f_m(x)-f_n(x)| < \varepsilon.$

To je triviální, protože platí nerovnost.

To znamená, že $\forall x\in[0,1]\ \exists L_x\in\mathbb{R}:$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = L_x .$$

Definujeme funkci $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ jako

$$f(x) = L_x = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Chceme: 1) f je spojitá, tj. $f\in C[0,1]$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n,f)=0$, tj. $f_n \rightrightarrows f$.

---

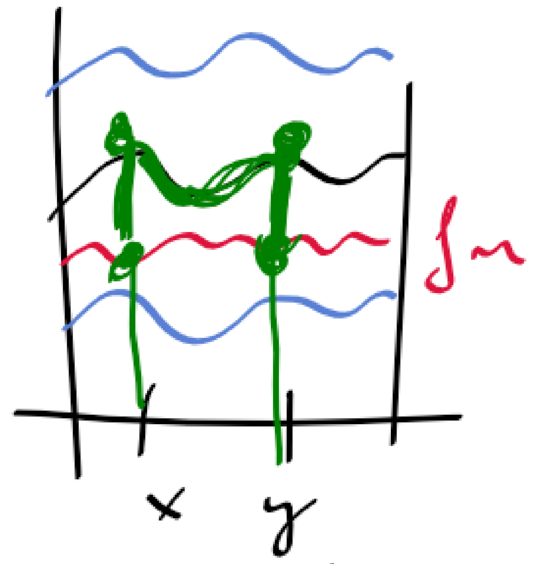
1) f je spojitá: (Mooreova–Osgoodova V. – MA3)

Nechť $x\in[0,1]$ je lib. Chceme f je spoj. v x.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Chceme $\delta>0$ . . . .

Najdeme $n_0\in\mathbb{N}$, že $\forall n,m\geq n_0$:

$$d_\infty(f_n,f_m) < \frac{\varepsilon}{\cancel{3}\ 4}$$



Nyní vezmeme $\delta>0$ z def. spoj. f_{n_0}, tj. t. ž.

$$\forall y\in[0,1]:\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{\cancel{3}\ 4}$$

Pak pro $n>n_0$ a $|y-x|<\delta$

$$|f_n(x)-f_n(y)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x)-f_{n_0}(x)|}_{\leq d_\infty(f_n,f_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|}_{\text{podle volby } \delta} + |f_{n_0}(y)-f_n(y)|$$

$$< \varepsilon/\cancel{3}\,4 + \varepsilon/\cancel{3}\,4 + \varepsilon/\cancel{3}\,4 = \varepsilon\cdot\frac{3}{4}$$

Tedy $|f(x)-f(y)| = |\lim f_n(x) - \lim f_n(y)| =$

$$= |\lim (f_n(x)-f_n(y))| = \lim \underbrace{|f_n(x)-f_n(y)|}_{<\varepsilon} \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$